

c) Essayaufgabe zur linearen Optimierung

A) Problem:

Nachdem Max und Moritz Ihr Studium abgeschlossen haben, entschliessen Sie sich die Bäckerei M&M zu gründen. In ihrem Wirtschaftsstudium haben die beiden gelernt worauf es ankommt, wenn man im Leben Erfolg haben will: Optimieren muss man können!

M&M will aus den Zutaten Weissmehl (W), Milch (M), Hefe (H) die Produkte Brot (B), Zopf (Z), Toastbrot (T), Semmel (S) und Croissant (C) herstellen. Die folgende Tabelle zeigt den Lagerbestand der Zutaten. Damit die Zutaten nicht vergammeln, möchte M&M von jeder Zutat eine Mindestmenge verbrauchen:

Zutaten	Lagerbestand (in Einheiten)	Mindestverbrauch (in Einheiten)
Weissmehl (W)	160	20
Milch (M)	210	30
Hefe(H)	120	10

Im Brockenhaus haben M&M das Kochbuch „Backen mit viel Liebe und wenig Geld“ gekauft und sich die Rezepte der Backwaren, die sie produzieren möchten, herausgeschrieben. Die Rezepte gelten jeweils für das Backen einer Einheit des jeweiligen Produktes:

Produkte	Einheiten Weissmehl (W)	Einheiten Milch (M)	Einheiten Hefe (H)
Brot (B)	5	1	1
Zopf (Z)	3	3	2
Toastbrot (T)	4	2	1
Semmel (S)	1	1	0
Croissant (C)	2	1	1

Nachdem M&M sich die Rezepte herausgeschrieben haben, überlegen sie sich, wie hoch die Herstellungskosten einer Einheit Brot, einer Einheit Zopf, einer Einheit Toastbrot, einer Einheit Semmel und einer Einheit Croissant sind. Unter Berücksichtigung der Kosten der Zutaten, der Strom-, Wasser und Reinigungskosten der Küche kommen M&M nach stundenlangem Rechnen und Verrechnen zu folgenden Herstellungskosten pro Einheit des jeweiligen Produktes:

Produkt	Herstellungskosten pro Einheit
Brot (B)	Fr. 5.-
Zopf (Z)	Fr. 6.-
Toastbrot (T)	Fr. 4.-
Semmel (S)	Fr. 2.-
Croissant (C)	Fr. 3.-

Wie viele Einheiten jeder Backware müssen M&M herstellen, damit die Herstellungskosten möglichst tief ausfallen ? Um diese Frage zu beantworten verwenden M&M die in der Oberstufe erlernte Methode der linearen Optimierung. Leider haben die beiden dort mehr gesurft als aufgepasst. Helfen Sie ihnen das entsprechende Modell zu formulieren:

B) Fragen:

a) Welches sind beim Optimierungsproblem von M&M die unabhängigen Variablen ?

Lösung: Die Produktionsmengen für Brot (X<sub>b</sub>), Zopf (X<sub>z</sub>), Toast (X<sub>t</sub>), Semmel (X<sub>s</sub>), Croissant (X<sub>c</sub>).

b) Formulieren Sie die Zielfunktion, die optimiert werden soll

Lösung: Herstellungskosten  $K = 5X_b + 6X_z + 4X_t + 2X_s + 3X_c$

c) Formulieren Sie die Nebenbedingungen, die bei der Optimierung berücksichtigt werden müssen

Lösung:

- Weissmehl:  $5X_b + 3X_z + 4X_t + 1X_s + 2X_c \geq 20$  und  $5X_b + 3X_z + 4X_t + 1X_s + 2X_c \leq 160$
- Milch:  $1X_b + 3X_z + 2X_t + 1X_s + 1X_c \geq 30$  und  $1X_b + 3X_z + 2X_t + 1X_s + 1X_c \leq 210$
- Hefe:  $1X_b + 2X_z + 1X_t + 0X_s + 1X_c \geq 10$  und  $1X_b + 2X_z + 1X_t + 0X_s + 1X_c \leq 120$

d) Nehmen wir an, dass Sie die bisherigen Fragen richtig beantwortet haben und die optimale Lösung nun mit Excel-Solver berechnen möchten. Welche zusätzlichen Nebenbedingungen benötigt Excel-Solver um das Problem zu lösen?

Lösung:

- Die Produktionsmengen  $X_i$  (unabhängige Variablen) müssen ganzzahlig sein
- Die Produktionsmengen  $X_i$  (unabhängige Variablen) dürfen nicht negativ sein

e) Nehmen Sie nun an, dass M&M einen Vertrag mit der Uni-Mensa abschliesst. Dieser Vertrag garantiert M&M, dass Sie all ihre Backwaren (unabhängig ob geniessbar oder nicht) zu den untenstehenden Preisen liefern können:

Produkt	Preis pro Einheit
Brot (B)	Fr. 7.-
Zopf (Z)	Fr. 9.-
Toastbrot (T)	Fr. 5.-
Semmel (S)	Fr. 4.-
Croissant (C)	Fr. 4.-

Im Vertrag steht zudem kleingedruckt, dass M&M auf jeden Fall einen Zopf und 5 Croissant für das Personal liefern muss.

Formulieren Sie das neue Optimierungsproblem, wenn M&M beschliesst diesen Vertrages zu unterschreiben.

Lösung:

- Gewinn maximieren anstatt Kosten zu minimieren !
- Zielfunktion:  $G = 7X_b + 9X_z + 5X_t + 4X_s + 4X_c$
- 2 neue Nebenbedingungen kommt hinzu:  $X_z \geq 1$  und  $X_c \geq 5$

d) Angenommen Ihnen steht kein Computer (und somit kein Excel-Solver) zur Verfügung, welcher Ihnen die optimale Lösung der beiden geschilderten Probleme automatisch berechnet. Nun erinnern Sie sich an die Lagrangemethode zur Optimierung unter Einhaltung von Nebenbedingungen, die Ihnen in den Mikro-Übungen der Unterstufe beigebracht wurde. Können Sie das Optimierungsproblem von M&M mit der Lagrangemethode lösen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Die Lagrangemethode ist nur verwendbar, wenn die Nebenbedingungen als Gleichungen formuliert werden können. Im Fall von M&M sind die Nebenbedingungen jedoch Ungleichungen !

f) Wissen sie den Namen des am häufigsten verwendeten Algorithmus bei der linearen Optimierung ? ( auch in Excel-Solver implementiert)

Lösung. Simplex-Algorithmus